j) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})})$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x \quad \ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X=\frac{1}{x})$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{t\to 1} e^t = e^1 = e \quad (t = x\ln(1+\frac{1}{x}))$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \ln e = 1$

k) Posons $X = e^x$. Lorsque $x\to+\infty$, $X\to+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(1+X)}{X}$

$$= \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X(1+\frac{1}{X})}{X} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} + \frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{X}$$

$$= \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} + \frac{1}{X}\ln(1+\frac{1}{X}) = 0+0\cdot 0 = 0$$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = ?$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X} = 1 \quad (X=\dfrac{x}{x^2-1})$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = \lim\limits_{t\to 1}\ln t = 0 \quad (t = xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x)$.